计算梁的弯曲变形的一种简便方法

诸葛致[1] 洪芳[2]
(1.桂林电子科技大学机电工程学院 桂林 541004; 2.广西区域地质调查研究院第一分院 桂林 541003)

摘 要:利用单位阶跃函数,可以把梁在集中载荷作用下的弯矩方程表示成一个整体方程,简化了求弯曲变形的计算工作量,同时还具有一定的理论价值。

关键词:梁 弯曲变形 单位阶跃函数 弯矩方程
中图分类号:TB301 文献标识码:A 文章编号:1672-3791(2007)08(a)-0162-01

在工程实际中,作用在梁上的载荷往往是比较复杂的,与之对应的弯矩通常是一个分段函数,因此,在求解挠曲线近似微分方程时,就要确定多个积分常数,而且分段数越多,积分常数也越多,因此积分常数的确定就成为一个十分冗繁的工作。减少积分常数的一个主要措施就是简化弯矩方程表达式,变多分段函数为少分段函数,最好将弯矩方程写成一个整体方程表达式[1]。

1 单位阶跃函数

单位阶跃函数的定义为[2]:

$$u(x-\delta)=\begin{cases}0 & x<\delta\\ 1 & x>\delta\end{cases} \quad (1)$$

利用单位阶跃函数,可以把分段函数用一个统一的函数形式表示出来。

如分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<a\\ a^2 & x>a\end{cases}$$

可表示为:$f(x)=x^2+(a^2-x^2)[u(x-a)]$

又如分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}bx & x<a\\ c+bx & x>a\end{cases}$$

可表示为:$f(x)=bx+c[u(x-a)]$

2 集中载荷作用下弯矩方程的统一表达式

2.1 单个集中力作用时

图1所示简支梁AB在C处受集中力P作用。按分段函数写出AC、CB两段的弯矩方程为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{pbx}{l} & 0<x<a\\ \dfrac{pbx}{l}-p(x-a) & x>a\end{cases}$$

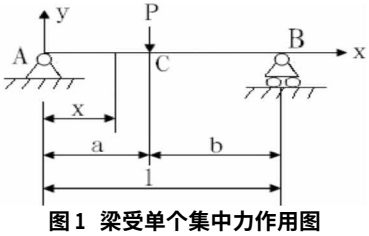

图1 梁受单个集中力作用图

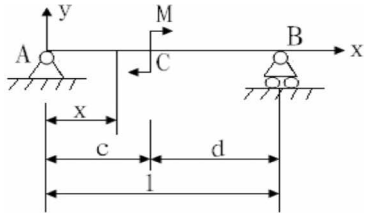

图2 梁受单个集中力偶作用

利用单位阶跃函数,可以把上述分段函数表示的方程写成一个表达式[3]:

$$M(x)=\frac{pbx}{l}+p(x-a)[u(x-a)] \quad (2)$$

2.2 单个集中力偶作用时

图2所示简支梁AB在C处受力偶M作用。按分段函数写出AC,CB两段的弯矩方程为:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{mx}{l} & x<c\\ -\dfrac{mx}{l}+m & x>c\end{cases}$$

利用单位阶跃函数,可以把上述分段函数表示的弯矩方程写成一个表达式[3]:

$$M(x)=-\frac{m}{l}x+m[u(x-c)] \quad (3)$$

2.3 多个集中载荷作用时

设梁AB受k个集中力Pi(i=1,2,3,…,k)和q个集中力偶Mj(j=1,2,3,…,q)作用;各集中力Pi(i=1,2,3,…,k)和集中力偶(j=1,2,3,…,q)的作用方式如图3所示。

当梁上作用多个集中力和集中力偶时,可按形如(2)式和(3)式写出各个集中力和集中力偶单独作用时的弯矩方程统一表达式,然后通过叠加原理求出这些集中载荷共同作用的弯矩方程表达式。各力Pi及Mj引起的弯矩为:

$$M_i(x)=\frac{p_ib_ix}{l}+p_i(x-a_i)[u_i(x-a_i)] \quad (4)$$

$$M_j(x)=-\frac{m_j}{l}x+m_j[u_j(x-c_j)] \quad (5)$$

根据叠加原理,梁的总弯矩为:

$$M(x)=\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{p_ib_ix}{l}+p_i(x-a_i)[u_i(x-a_i)]\right\}+$$

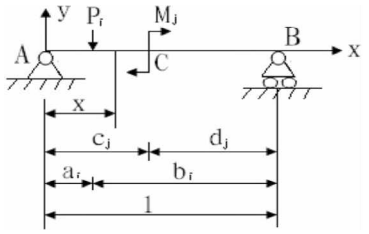

图3 梁受多个集中力和集中力偶作用

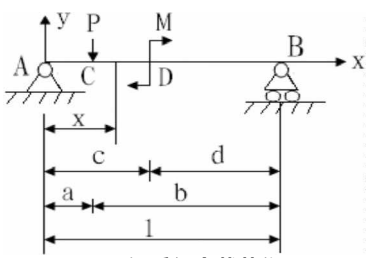

图4 梁受组合载荷作用

$$\sum_{j=1}^{q}\left\{-\frac{m_jx}{l}+m_j[u_j(x-c_j)]\right\} \quad (6)$$

3 应用实例

问题:一简支梁AB及其所受载荷如图4所示,试用单位阶跃函数写出弯矩方程的统一表达式。

在集中力P单独作用下,根据(2)式得:

$$M_1(x)=\frac{pbx}{l}+p(x-a)[u_1(x-a)] \quad (7)$$

在集中力偶M单独作用下,根据(3)式得:

$$M_2(x)=-\frac{mx}{l}+m[u_2(x-c)] \quad (8)$$

所以,在P与M的共同作用下,梁弯矩方程表达式为:

$$M(x)=M_1(x)+M_2(x)=\frac{pb-m}{l}x-p(x-a)u_1(x-a)+mu_2(x-c) \quad (9)$$

4 结语

在用梁的挠曲线近似微分方程求梁的变形时,若梁的弯矩方程包含n个分段函数,则求解梁的挠度和转角时,将一共会产生2n个积分常数,要确定这2n积分常数就需要2n个边界条件,导致较大的计算工作量[4,5,6]。例如,如果一个梁作用有四个集中载荷,在挠曲线近似微分方程求梁的变形时就有10个积分常数,显然计算量较冗繁,如果能把弯矩方程化成一个整体表达式,则积分常数只有2个,计算量的减少是很明显的。

参考文献

[1] 单辉祖.材料力学[M].北京:高等教育出版社,2004.
[2] 刘鸿文.高等材料力学[M].北京:高等教育出版社,1985.
[3] 张于贤.单位阶跃函数在梁的弯曲变形中的应用[J].桂林电子工业学院学报,2000,20(2):65-69.
[4] 林成厚,郭华北,吕钊钦.阶梯式梁弯曲变形的简化计算[J].山东农业大学学报,1997,1:37-44.
[5] 白杰,黄建国.求解经典梁弯矩的两种正则化方法[J].上海交通大学学报,2005,39(6):1028-1032.
[6] 徐汉忠,谢桂华,律海燕.弯矩分配传递极限公式在薄板弯曲问题中的应用[J].河海大学学报(自然科学版),2003,31(2):193-195.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net