

梁弯曲、扭转、稳定分析的三维退化 层合梁单元有限元法

王小岗

(青海大学建工系 西宁 810016)

摘要 首先在 20 结点三维块体等参元及 16 结点相对位移板壳元的基础上,引入梁的基本假定,采用等效数值积分法,构造出 12—20 结点三维退化层合梁单元,然后考虑几何非线性,给出用于梁线弹性稳定分析的有限元列式,文中单元直接由三维块体等参元退化而得,只有线位移自由度,可以方便地与相对位移板单元和三维块体单元协调连结。又用三维退化梁单元分析了实心杆的弯曲、自由扭转及分支屈曲的临界荷载,其数值结果和理论解符合很好。

关键词 三维退化层合梁单元 有限元 弯曲 扭转 分支屈曲

用有限单元法分析梁结构、单元类型的选择至关重要,直接影响到求解的精度和效率。在有限元发展中,用结点位移插值单元内部位移的位移元一直占主导地位,因而对梁位移元的研究也最多。一维梁单元、平面梁单元和空间梁单元等发展目前已很成熟,并且多数考虑了几何非线性、弹塑性、粘弹性、粘弹塑性等材料非线性问题,如 ANSYS、MARC、SUP91、NASTRAN 等通用程序。常用的一维梁单元有两种形式:经典梁单元和考虑剪切变形的梁单元(如 Timoshenko 梁单元等)。只有当梁的跨度远大于梁的厚度(高)时,采用经典梁单元能得出满意的结果,否则误差很大,且一维梁单元无法描述梁内的应力分布。考虑剪切变形的梁单元,当梁较薄时,存在一定程度的剪切闭锁现象。建立杂交应力元,可从根本上消除梁单元剪切闭锁。但杂交应力元在构造上机理复杂,推导繁复,在推导非线性问题时忽略了一些高阶非线性项,对缺陷敏感的结构,其稳定性分析会出现很大的误差。采用平面梁单元和空间梁单元时,因单元结点存在转角位移,用于组合结构分析时,该类单元与其他类型单元的连接十分困难。

Noor 于 1975 年首先提出了基于三维块体单元的三维退化壳单元,考虑了一阶剪切变形,较经典位移元和 Mindlin 板元有较大优越性,公式简单明了,很适合于工程计算^[1]。Zienkiewicz 在他的名著^[2]中指出:八节点四十自由度厚壳单元系统比直接应用三维单元更复杂些,而这确实会诱使读者直接应用三维公式系统。然而如果在壳体法线方向采用线性插值,当 Poisson 比不为零时,结果会由于 $(1 - \mu^2)$ 而收敛于一个错误解答。徐兴教授引入壳体理论的基本假设,巧妙的克服了上述困难,创造性的构造出一个新的能很好反映横向剪切变形影响的十六结点四十自由度相对位移板壳单元^[3]。凌道盛等^[4]进一步引入虚拟层的概念,很好的解决了 T 型和箱形梁板结构的弯曲问题。陈衍等^[5]进一步构造出二维退化层合梁单元,已成功的解决了象“哑铃”形截面的钢管混凝土拱的弯曲问题。上述结果表明,基于相对自由度原理的梁(板)

收稿日期:1999-04-22

单元存在广泛的工程应用前景,尤其对桥梁结构的设计具有重要的现实意义,该类单元目前已成为有限元研究的一个热点。

本文在文[3][4][5]的基础上,构造出 12~20 结点三维退化梁单元。该单元直接由三维块体等参元退化而得,只有线位移自由度,可方便的与相对位移板壳单元连接,结点自由度少,考虑了三个方向的剪切变形,单元构造简单明了,概念清晰,特别适合于工程结构的总体分析。该单元的应用前景十分广泛,作者已成功地采用该单元计算了薄壁箱梁的约束扭转、哑铃形钢管混凝土拱的面内及面外屈曲的临界荷载^[6]。本文进一步用三维退化梁单元分析实心杆的弯曲、自由扭转及分支屈曲的临界荷载,其数值结果和理论解符合很好。

1 三维退化梁单元有限元列式

1.1 基本假定

根据梁的变形及受力特点,本文引入如下假定:

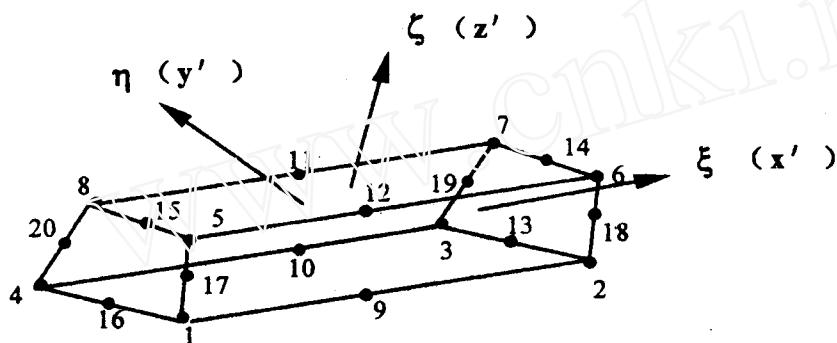


图 1 12~20 结点三维退化梁单元定义

- a 梁横向正应力与轴向正应力相比可以忽略不计。如图 1 中, $\sigma_y' = \sigma_z' = 0$;
- b 相应地,横向方向的正应变不独立,相对位移也不独立。事实上,相对位移 $\Delta v'$ 、 $\Delta w'$ 均为小量,可以略去。这样, $\epsilon_y' = \epsilon_z' = 0$ 。

1.2 单元几何形状的描述

图 1 所示,12~20 结点,36~60 自由度的直边或曲边梁单元,其母单元边界定义为: ξ 、 η 、 $\zeta = \pm 1$ 。 $\zeta = \pm 1$ 面为层合梁的底面, $\zeta = 1$ 面为层合梁的顶面。 $\zeta = -1$ 和 $\zeta = 1$ 之间分为 n 层,底面、顶面、每层界面的 ζ 坐标由底及顶依次为 $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$; $\zeta_0 = -1, \zeta_n = 1$ 。同理,在每层内对各段坐标 η 也作类似的边界及界面定义。

实际单元与母单元之间的转换关系为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 x_i, y_i, z_i 为结点的整体笛卡尔坐标,形函数 N_i 与三维块体等参元相同^[7]。

1.3 单元位移模式

单元位移插值模式为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 u_i, v_i, w_i 为单元结点位移。

1.4 单元物理方程及应力应变关系的确定

在图 1 的局部坐标系 $o'x'y'z'$ 中, 第 k 层中第 1 段材料的应力应变关系为

$$\sigma' = D'\epsilon \quad (3)$$

其中

$$\sigma' = [\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', \tau_{yz}', \tau_{xz}', \tau_{xy}']^T$$

$$\epsilon' = [\epsilon_x', \epsilon_y', \epsilon_z', \gamma_{yz}', \gamma_{xz}', \gamma_{xy}']^T$$

$$D' = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

考虑到 1.1 引入的梁的基本假定, 应力应变关系退化为如下形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x' \\ \gamma_{yz}' \\ \gamma_{xz}' \\ \gamma_{xy}' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中的 E, G 为材料的弹性模量及剪切模量。

记局部坐标系 $o'x'y'z'$ 的三个坐标轴在整体坐标系 $oxyz$ 中的方向余弦矢量为 V_1, V_2, V_3 , $V_1 = [l_1, m_1, n_1]$, $V_2 = [l_2, m_2, n_2]$, $V_3 = [l_3, m_3, n_3]$ 。

根据虚功原理, 得出弹性矩阵的坐标变换式

$$D = T^T D' T \quad (5)$$

式中的转换矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2l_1n_1 & 2l_1m_1 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_3n_2 + m_2n_3 & l_2n_3 + n_2l_3 & l_3m_2 + l_2m_3 \\ l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & m_1n_3 + m_3n_1 & l_1n_3 + n_1l_3 & l_3m_1 + l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_2n_1 + n_2l_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}$$

1.5 单元刚度矩阵

由于不同层中各段的材料模量 D' 一般不相同, 需要分层分段积分, 单元刚度矩阵中第 i, j 块典型子矩阵为

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \left[\sum_{l=1}^m \int_{\eta_{l-1}}^{\eta_l} \int_{-1}^1 B_i^T D B_j + J + d\xi d\eta \right] d\xi \quad (6)$$

为在每一层及层中的每一段采用 Gauss 积分, 将(6)式进行线性变换

$$\zeta = \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} \zeta' + \frac{\zeta_k + \zeta_{k-1}}{2} \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{2} \eta' + \frac{\eta_l + \eta_{l-1}}{2} \quad (8)$$

则 $K_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{2} B_i^T D B_j + J + d\xi d\eta' \right] \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} d\xi \quad (9)$

积分式(9)中每一项均可用高斯积分得出:

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left(\sum_{r=1}^{gr} \sum_{s=1}^{gs} \sum_{t=1}^{gt} \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{2} B_i^T D B_j + J + \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} \right)_{\xi_r, \eta_s, \zeta_t} H_r H_s H_t \quad (10)$$

式中 n、m 分别为层数及各层中材料的分段数; gr、gs、gt 分别为各个方向的积分点数目; ξ_r 、 η_s 、 ζ_t 为积分点局部坐标; H_r 、 H_s 、 H_t 为 Gauss 积分点的加权系数。

2 几何非线性梁单元切线刚度矩阵及稳定问题的特征方程

本文采用 Total Lagrange 格式建立三维退化梁单元几何非线性有限元方程。对几何非线性有限元方程进行适当改造,即可用于求解结构稳定分析中第一类分支问题。

屈曲的含义可简单表述为:结构处于一种平衡状态,荷载增量为一微量,但位移增量很大,描述这种现象的有限元方程式为^[7]

$$(K_L + K_S)\{\Delta u\} = [K_T]\{\Delta u\} = \{0\} \quad (11)$$

上式中 $\{\Delta u\}$ 有不平凡解,要求 $[K_T]$ 的行列式必须为零,这样就得到稳定问题屈曲的判别准则,即

$$[K_T] = |K_L + K_S| = 0 \quad (12)$$

式(12)中的 K_S 并不明显的包含位移增量矢量 $\{\Delta u\}$,在小变形情况下,该矩阵与应力成正比。由于屈曲前线性假设,并且限定材料为线弹性,则应力与外荷载为线性关系。令一参考荷载 F_0 对应的几何刚度矩阵为 K_S^0 ,设屈曲极值荷载为 F_c ,且与参考荷载存在关系: $F_c = \lambda_c F_0$, λ_c 为极值荷载比例因子。极值荷载对应的几何刚度矩阵为 $K_S^c = \lambda_c K_S^0$

代入式(12),得到第一类稳定问题的特征方程

$$|K_L + \lambda_c K_S^0| = 0 \quad (13)$$

式中 $K_L = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{2} B_L^T D_B B_L + J + d\xi d\eta' \right] \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} d\xi \quad (14)$

$$K_S = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \left[\sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{2} G^T M_B G + J + d\xi d\eta' \right] \frac{\zeta_k - \zeta_{k-1}}{2} d\xi \quad (15)$$

其中 $B_L = LN$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} I & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} I & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial X_1} I \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} I & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} I & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial X_2} I \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_3} I & \frac{\partial N_2}{\partial X_3} I & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial X_3} I \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} S_{11} I & S_{12} I & S_{13} I \\ S_{21} I & S_{22} I & S_{23} I \\ S_{31} I & S_{32} I & S_{33} I \end{bmatrix}$$

$S = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{23} \quad S_{31} \quad S_{12}]$ 为 Kirchhoff 应力张量。

求解过程: 先对结构施加一个参考荷载 F_0 , 求出 K_s^0 , 代入(13)式, 求解广义特征值方程, 解出最小特征根 λ_c , 临界荷载为 $F_c = \lambda_c F_0$ 。

以上给出了三维退化梁单元的有限元算式, 一般情况下 12 结点单元就能较好地解决问题, 13~20 这八个结点可视梁的横向尺寸大小决定取舍。20 结点三维退化梁单元由于约束掉 y' 、 z' 方向各 12 个法向相对位移, 单元共有 36 个自由度, 取 12 结点时, 单元共有 24 个自由度。单元划分时, 本单元的轴向尺寸可以远大于横向尺寸, 巧妙地克服了用三维块体单元解梁问题网格过于密集及当轴向尺寸大于横向尺寸时单元刚度矩阵出现病态的弊端。

3 数值算例

算例 1 如图 2 所示均布载荷作用下的“工字型”截面悬臂梁, 长 $L = 10m$, 上、下表面层厚度为 $h_1 = h_3 = 0.2m$, 梁的总高度为 $1m$, 梁宽度为 $b_1 = b_3 = 0.6m$, 腹板厚为 $b_2 = 0.2m$, 均布载荷为 $q = 1KN/m$ 。采用三维退化虚拟层合梁单元法, 分为三层, 上层和下层只有一段, 中间层为 3 段, 外侧的两段均为虚拟段。在计算中, 采用 2×1 单元网格, 共 32 个节点。

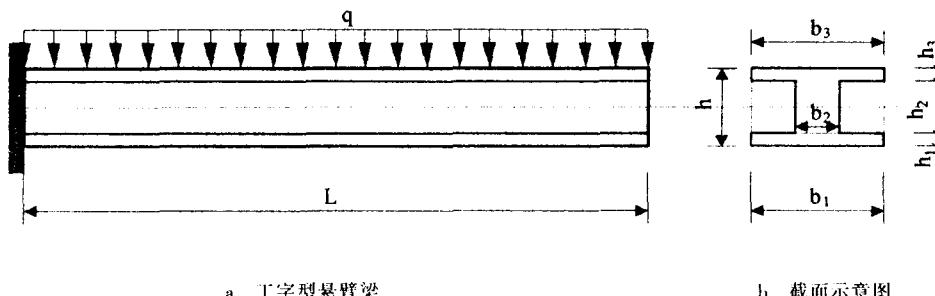


图 2 均布荷载作用下“工字型”悬臂梁

a 取三层 $E_1 = E_2 = E_3 = 2.0 \times 10^{11} N/m^2$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.3$, 得

悬臂梁自由端的挠度 $W_{fem} = 1.46384 \times 10^{-4} m$, 单层梁弹性理论精确解^[8] $W_{exact} = 1.46 \times 10^{-4} m$ 。

本文的计算结果与理论解的相对误差为 0.249%。

b 取上、下表面层 $E_1 = E_3 = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\mu_1 = \mu_3 = 0.3$; 夹心层 $E_2 = 2.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\mu_2 = 0.16$, 得

悬臂梁自由端的挠度 $W_{\text{fem}} = 1.5346 \times 10^{-4} \text{ m}$; 夹层梁理论解^[9] $W_{\text{exact}} = 1.524 \times 10^{-4} \text{ m}$

本文的计算结果与理论解的相对误差为 0.695%。

算例 2 实心杆的自由扭转

在弹性理论中, 等截面实心杆自由扭转问题可利用逆解法或半逆解法, 把问题转化为求解 Poisson 方程的 Neumann 边值问题或 Dirichlet 边值问题, 但仅对个别简单截面可找出解析解, 对大部分形状较为复杂的截面则非常困难, 一般多利用薄膜比拟法借助实验寻求近似解。据文献记载^[10], Gourant 于 1943 年利用有限元思想, 将杆截面剖分为三角形单元的集合, 假设翘曲函数在三角形内呈线性分布, 求出 StVenant 扭转问题的数值解。本文首次采用三维退化梁单元求解实心杆的自由扭转问题, 其截面翘曲与弹性理论解符合的很好。还可以用该单元分析任意截面形式实心杆的自由扭转及约束扭转问题。

考虑矩形及正方形截面杆的自由扭转。沿杆轴向划分为 5 段, 横截面按对称轴划分 4 部分, 共 20 个三维退化梁单元, 截面尺寸如图 3a。有限元结果表明, 横截面对称轴上的点翘曲位移均为零; 因翘曲位移引起的横截面凹凸变形相对于对称轴反对称分布; 自由端面上最大翘曲位移所在点, 矩形截面为四个角点, 正方形截面为边界上距离角点 $1/4$ 边长的八个点, 如图 3b。取正方形截面 $a = b = 0.5 \text{ m}$, 矩形截面 $a = 0.5 \text{ m}, b = 1 \text{ m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $V = 0.25$, 杆长 $l = 10 \text{ m}$, 自由端面上作用线分布切向力集度 $q = 10^5 \text{ N/m}$, 截面最大翘曲变形与弹性理论解比较见表 1。

表 1 正方形及矩形杆自由扭转自由端最大位移比较

	$u(10^{-6})$	$u(10^{-5})$	$c(10^{-5})$
正方形杆 (1×1)	三维退化梁单元	0.5944	-4.189
	弹性理论解	0.5889	-4.233
	相对误差(%)	0.9	1.0
矩形杆 (1×2)	三维退化梁单元	2.416	-2.558
	弹性理论解	2.427	-2.599
	相对误差(%)	0.45	1.6

注: 理论解中的级数取前三项。

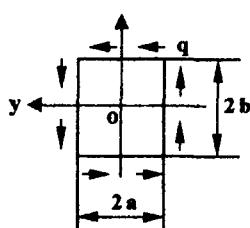


图 3a 矩形截面杆扭转

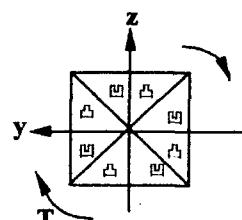


图 3b 正方形截面杆扭转截面翘曲

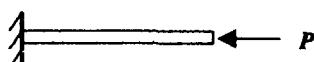


图 4 悬臂等直轴压杆

算例 3 等直实心轴压杆的临界荷载

图 4 所示一端固支另一端自由的等直矩形截面轴压杆, 长 $L = 20 \text{ m}$, 截面边长为 $b = 2a =$

2 m, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ N/m², $\mu = 0.3$, 计算结果见表 2。

表 2 一端固支另一端自由的等直矩形截面轴压杆屈曲临界荷载

	Euler 公式理 论解	截面剖分为四块 轴向划分五段 共 20 个梁单元	相对误差(%)	横截面不剖分 轴向划分 10 个梁单元	相对误差(%)
绕 y 轴(长轴)屈曲 临界荷载 $P_{cr}^y (10^8 N)$	8.6359	8.5825	0.62	8.57336	0.72
绕 Z 轴(短轴)屈曲 临界荷载 $P_{cr}^z (10^8 N)$	2.159	2.16544	0.25	2.15997	0.14

4 结语

本文综合了等效单层理论和分层理论的优点,构造出 12~20 结点三维退化梁单元。公式系统简单明了,计算精度很高,适合于对复杂截面形式的分层直梁或曲梁的计算。与分层单元相比,减少了大量的结点数目,缩短了计算时间。该单元对复杂空间梁结构的计算适应性很强,并与三维块体单元和三维退化板单元很好的协调连接,进行空间问题的综合分析。同时,该单元对稳定性分析存在较大的优势,可广泛应用于工程技术。

致谢 本课题在作者导师、浙江大学徐兴教授悉心指导下完成,特致谢意。

参 考 文 献

- 1 王勘成,邵敏.有限单元法基本原理及数值方法.北京:清华大学出版社,1998
- 2 O.C.Zienkiewicz.The finite Element Method(Third edition).McGraw-Hill,1977
- 3 X.Xu,R.F.Cai.A new plate shell element of 16 nodes 40 degrees of freedom by relative displacement method. Communications in numerical methods in engineering. Vol. 9, 1993, 15~20
- 4 凌道盛.夹层板的非线性有限元分析.[博士学位论文].杭州:浙江大学,1997
- 5 陈衍.钢管混凝土拱桥的层合梁单元有限元分析.[硕士学位论文].杭州:浙江大学,1997
- 6 王小岗.钢管混凝土拱稳定分析的三维退化层合梁单元有限元法.[硕士学位论文].杭州:浙江大学,1998
- 7 徐兴,郭乙木,沈永兴.非线性有限元及程序设计.杭州:浙江大学出版社,1993
- 8 谢贻权,林钟祥,丁皓江.弹性力学.杭州:浙江大学出版社,1988
- 9 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组.夹壳板壳的弯曲、稳定和振动.北京:科学出版社,1977
- 10 S.S.Rao.工程中的有限单元法.北京:科学出版社,1992

The Finite Element Analysis on Bending and Torsion and Stability of Beam by the Degenerated 3D Laminated Beam Element

Wang Xiaogang

(Civil Engineering Department of Qinghai University, Xining 810016)

Abstract Based on 3D iso-parameter and the plate shell element of relative displacement (Xu Xing 1993), and combining with beam assume and layer integration, we proposed the degenerated 3 dimensional laminated beam element concerning geometrical nonlinear, which can (下转第 20 页)

可控制在 30℃以下操作,这样可以减轻第二冷却器的热负荷,从而减少冷冻盐水的量。

从表 5 数据可以看出,出第二冷却器(干燥塔进口)氯气温度降低对干燥用酸量的影响较大,似乎温度越低越好。但是,当温度过低时,会生成 $\text{Cl}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ 结晶,因此,高海拔地区在控制出第二冷却器氯气温度时,应在保证不生成 $\text{Cl}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$ 结晶的前提下尽可能采用较低的温度。

8 结语

以上讨论表明,海拔高度的增加会对烧碱生产带来不良影响,采用与低海拔地区相同的操作条件,将会使烧碱成本增加,有时甚至无法操作。因此,若在高海拔地区生产烧碱,确定操作参数时必须考虑海拔高度的影响,不能照搬低海拔地区的操作参数。

参 考 文 献

- 1 方度,蒋兰荪,吴正德主编.氯碱工艺学.北京:化学工业出版社,1990.170~179,209,351,345~355,364
- 2 陈五平主编.无机化工工艺学(四).北京:化学工业出版社,1980.152~160
- 3 高文耀.高原环境对真空制盐的影响.海湖盐与化工,1993,(5)

The Influence of Elevation to the Process of Caustic Soda Producing

Zhang Xingru

(Chemical Engineering College of Qinghai University, Xining 810016)

Abstract This paper analyses the influence of elevation to the produce of caustic soda by electrolysis of salt and the drying of chlorine gas process. Points out the increasing of elevation level could make the reducing of producing efficiency. When we determine the producing parameter in high elevation level area, We must consider the influence of elevation.

Key words Elevation, Caustic soda, Electrolysis of salt, Chlorine gas, Dry

(责任编辑 王宝通)

(上接第 7 页)

be used for analysis on bending and torsion and critical load of linearelastic buckling of beam. Being degenerated from 3D iso - parameter element , the new element, whose nodes have no rotation freedom, can be connected coordinately with many of other types elements. On the other hand, the geometric shape, boundary contritions, material composition and load locations in the element can be simulated easily and naturally. All the applicatitions and results of them elucidate that the method and the elements presented in the paper are more effectively than much of the others.

Key words Degenerated 3 dimensional laminated beam element, Finite element method, Bending, Torsion, Linear - elasatic buckling

(责任编辑 王宝通)